

Б. Н. РОДИОНОВ

ПРОЕКТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ *

Настоящее сообщение относится к проблеме аналитического выражения зависимости фотографической плотности D от экспозиции H . Как известно, первая попытка решения этой проблемы была предпринята Гюльдбергом и Вааге в 1867 г. [1]. С тех пор разными исследователями предложено более двух десятков уравнений, формализующих указанную зависимость. Тем не менее эта проблема остается актуальной.

Мы встретились с необходимостью формализации функции $D(H)$ при построении единой математической модели процесса получения фотографического изображения, которая в сходных терминах описывала бы и геометрическую, и энергетическую сущность этого процесса. Такая модель упрощает машинную интерпретацию изображений, особенно анализ и синтез многозональных фотографий, получаемых с целью изучения природных ресурсов и окружающей среды. Исследования были начаты 10 лет назад, а первая публикация сделана в статье «Иконика и иконология» (1973) [2].

Мы обратили внимание на то, что кривые $D(H)$, построенные по данным стандартных сенситометрических испытаний, напоминают гиперболу (рис. 1), уравнением которой в декартовых координатах является дробно-линейная функция. Но эта же функция выражает связь неоднородных

* Доклад на заседании секции информационных свойств фотоматериалов Комиссии по химии фотографических процессов, посвященном памяти Ю. Н. Гороховского, 19 января 1978 г.

192

проективных координат одномерных многообразий, т. е. арифметизирует проективное соответствие. Имело смысл проверить, не является ли отображение $H \rightarrow D$ проективным и нельзя ли формализовать зависимость D от H с помощью аппарата проективных преобразований.

Представим оси абсцисс и ординат графика $D(H)$ как две прямые, на которых имеются системы точек H_1, H_2, \dots, H_n и D_1, D_2, \dots, D_n , связанные одни с другими некоторой функциональной зависимостью. Очевидно, H_i — стандартные экспозиции, D_i — соответствующие им фотографические плотности, $1 \leq i \leq n$ — номера полей сенситометрического клина. Если наша гипотеза верна, то должно удовлетворяться условие

$$M_D = M_H,$$

где $M_{D, H}$ — сложные отношения любой группы четырех соответствующих точек на одной и на другой прямой.

Мы исследовали все характеристические кривые (ХК), помещенные в справочнике Ю. Н. Гороховского и В. П. Барановой [3], большое число ХК, полученных из реальных сенситометрических испытаний разнообразных современных черно-белых и цветных фотоматериалов, обработанных в различных проявителях *. Можно утверждать, что для большого класса фотоматериалов указанное условие выполняется с точностью, которая не хуже точности стандартных сенситометрических испытаний.

Мы показали также, что любая реальная функция $D(H)$ может быть выражена проективным соответствием, если использовать введенное нами понятие фотометрической дисторсии.

В общем виде взаимно-однозначное соответствие $D \rightleftharpoons H$ формализуется уравнениями

$$D' = \frac{aH+b}{cH+1} + d', \quad (1)$$

$$H' = \frac{D-b}{a-cD}(1-h'), \quad (2)$$

где a, b, c — нормированные параметры проективного преобразования, D и H — текущие измеренные, а D', H' — вычисленные плотности и экспозиции, d' и h' — вычисленные прямая и обратная фотометрические дисторсии,

$$d' = d_{cp} + e \sin \omega \lg \frac{H}{H^*} \quad (3)$$

$$h' = f \{ -(D-D^*)^2 - g^2 + g [4(D-D^*)^2 + g^2]^{1/2} \}^{1/2} \quad (4)$$

$d_{cp}, e, \omega, H^*, f, g, D^*$ — параметры дисторсии.

Большая половина всех исследованных ХК хорошо аппроксимируется формулами (1) и (2), если даже отбросить в них d' и h' , т. е. посредством трех параметров a, b, c . Фотоматериалы высокой контрастности, а также с «аномальными» ХК требуют, как правило, сохранения d' и h' в (1), (2), что влечет за собой необходимость привлечения параметров дисторсии.

Рекомендуется определять указанные параметры последовательными приближениями. В первом приближении используются формулы

$$K_1 = H_q - H_p, K_2 = D_q - D_p, K_3 = H_r - H_p, K_4 = D_p H_p, \\ K_5 = D_q H_q K_4$$

* Всего исследовано более 1000 ХК.

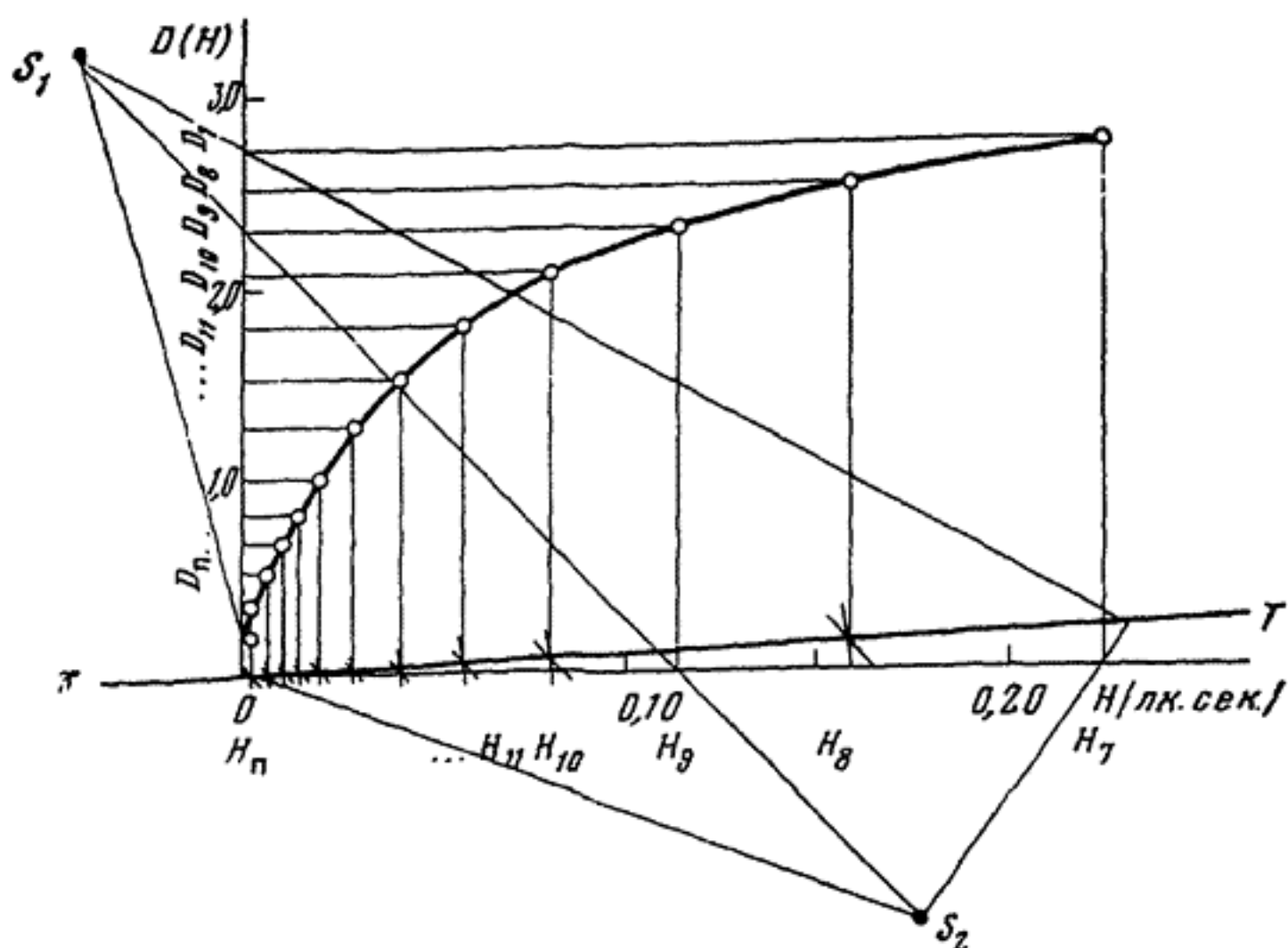


Рис. 1. К проективному представлению характеристической кривой. Тип-17, УП-2, 24 мин. $D' = (64,89 H + 0,13) / (19,25 H + 1)$, $m_d = \pm 0,011$, $m_{d_{доп}} = \pm 0,04$, \circ — из справочника [3], табл. 297, — — проективная аппроксимация

$$c = \frac{(D_r - D_p) K_1 - K_2 K_3}{K_5 K_3 - (D_r H_r - K_4) K_1} \quad (5)$$

$$a = \frac{K_2 + K_5 c}{K_1} \quad (6)$$

$$b = D_p - H_p a + K_4 c \quad (7)$$

Здесь p, q, r — номера полей клина в начале, середине и конце ХК, H_p, q, r , D_p, q, r — соответствующие им экспозиции и плотности, полученные при сенситометрических испытаниях. Как видно из этих формул, для определения a, b, c достаточно всего лишь трех точек ХК, причем точки p и r рекомендуется брать, отступив на одно-два поля от ее начала и конца. Далее следует оценить достаточность a, b, c . Это делается в таком порядке. Составляется таблица по схеме:

$$i | H_i | D_i | D_i' | d_i | H_i' | \varepsilon H_i | h_i$$

Здесь i — номер поля сенситометрического клина; H_i — соответствующая этому полю стандартная экспозиция; D_i — плотность поля i , измеренная на сенситограмме; D_i' — то же, вычисленное по формуле (1) при подстановке в нее H_i и $d=0$; $d_i = D_i' - D_i$ — рассогласования между вычисленной и измеренной плотностями; H_i' — экспозиция, вычисленная по формуле (2) при подстановке в нее D_i и $h=0$; $\varepsilon H = H_i' - H_i$ — рассогласование между вычисленной и стандартной экспозициями, $h_i = \varepsilon H_i / H_i$. Рассогласования d_i и есть упомянутая выше фотометрическая дисторсия, названная так по аналогии с фотограмметрической дисторсией, так как и та и другая характеризуют отступления от проективного соответствия: первая — в энергетическом, а вторая — в геометрическом смысле. Точность аппроксимации, очевидно, может быть оценена средней квадратичной величиной дисторсии

$$m_d = \left(\sum_{i=p}^{i=r} d_i / n - 1 \right)^{1/2} \quad (8)$$

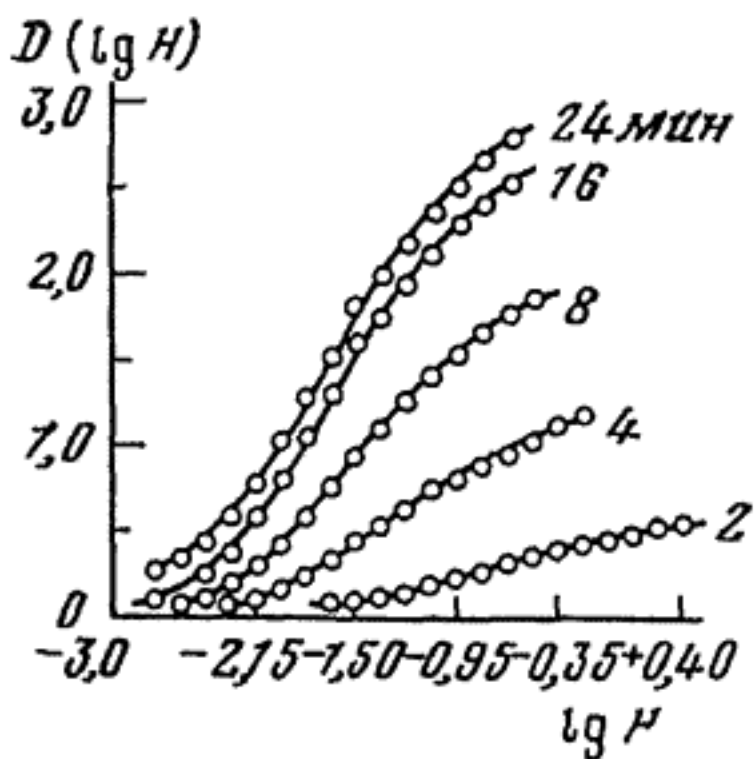


Рис. 2

Рис. 2. Пример проективной аппроксимации ХК в отсутствие фотометрической дисторсии. КН-3, ГОСТ № 2. \circ — из [3], табл. 162, — проективная аппроксимация

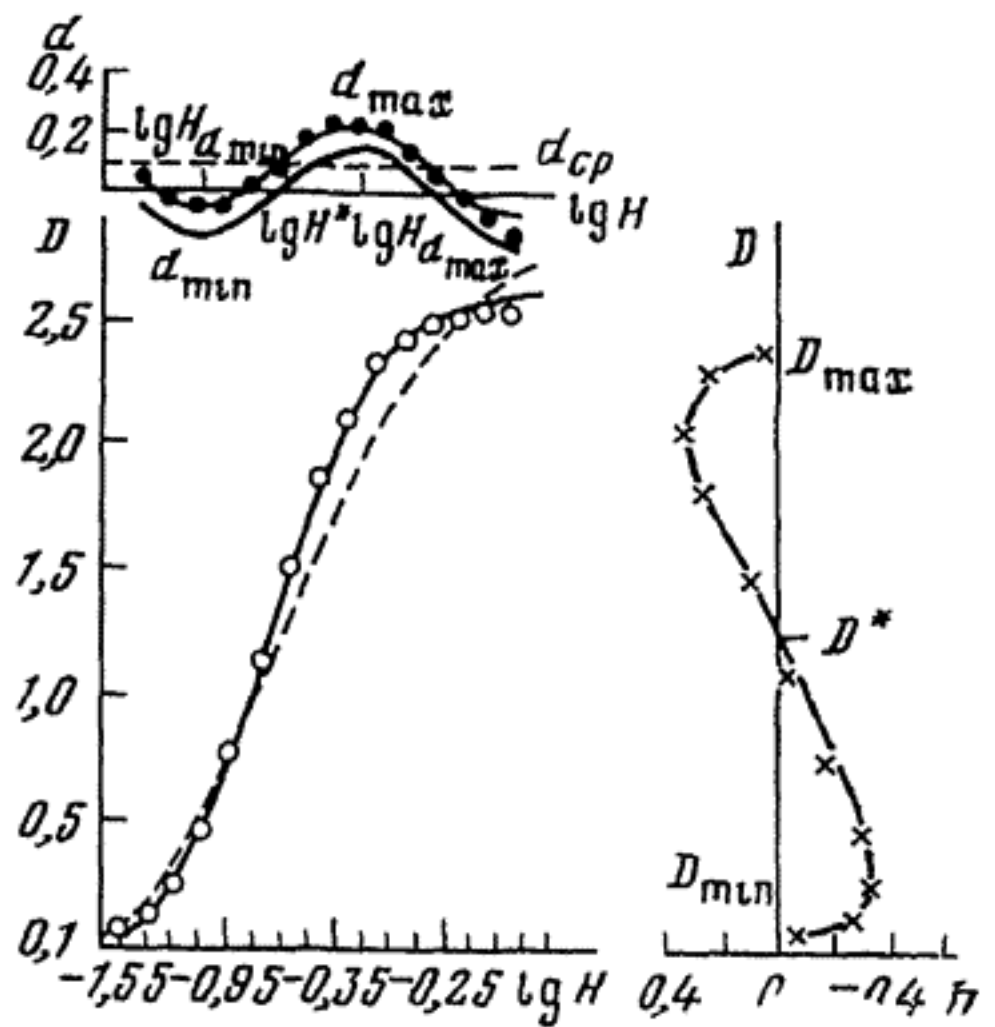


Рис. 3

Рис. 3. Пример проективной аппроксимации ХК фотоматериала с большой фотометрической дисторсией. Тип-18, УП-2, 16 мин. \circ — из [3], табл. 290, штриховая кривая — аппроксимация с использованием трех параметров, — фотометрическая дисторсия, шпильчатая кривая — приведенная дисторсия и аппроксимация с использованием шести параметров, \otimes — обратная фотометрическая дисторсия $D' = (13,43 H - 0,22) / (4,65 H + 1)$, $m_d = \pm 0,15$, $D'' = (14,23 H - 0,13) / (4,84 H + 1) + 0,16 \sin 200^\circ (\lg H - 0,8)$, $m_d = \pm 0,02$, $m_{d_{доп}} = \pm 0,04$, $D^* = 1,34$, $g = 0,816$, $f = 0,277$

Для того чтобы оценить достаточность a , b , c , необходимо задаться критерием $m_{d_{доп}}$, ограничивающим допустимую величину m_d . В качестве такого критерия мы приняли

$$m_{d_{доп}} = 0,01(0,5 + D_{cp} + \gamma). \quad (9)$$

Здесь $D_{cp} = 0,5(D_{max} + D_{min})$ — средняя плотность сенситограммы; γ — коэффициент контрастности ХК. Формула (9) выведена нами эмпирически на основании требований ГОСТа [4]; сложение D_{cp} и γ , конечно, не имеет физического смысла, а используется лишь для получения численного коэффициента, приближенно характеризующего сквозную точность стандартных сенситометрических испытаний.

Если $m_d \leq m_{d_{доп}}$, то найденные a , b , c достаточны. В противном случае надо попытаться уточнить их. Для этого составляется система линейных условных уравнений вида

$$H_i a + b - H_i D_i c - D_i = d_i | P_i,$$

которая решается относительно a , b , c по методу наименьших квадратов под условием $\sum d_i^2 = \min$. Решение делается трижды с введением в каждое уравнение весов $p_i = 1/D_i^2$, или $p_i = 1/D_i H_i$, или $p_i = 1/H_i^2$. Достаточность уточненных a , b , c проверяется указанным выше образом. За окончательное решение принимается то, которому соответствует меньшее m_d .

На рис. 1, 2 и в таблице представлены примеры аппроксимации функции $D(H)$ с использованием трех параметров; исходные данные подсчитаны по скалярным множителям, взятым из [1].

Проективность $D \approx H$ наглядно иллюстрируется при помощи построений, выражающих ее в виде линейной перспективы. На рис. 1 через соответственные точки D_0 и H_0 проведена прямая и на ней взяты произвольные точки S_1 и S_2 , принимаемые за центры проекции. Затем из S_1 и S_2 проведены лучи через остальные точки D_i и H_i . Можно видеть, что пересечения

$t_{пр. мин}$	D_0	γ	$S_{0,2}$	$S_{0,85}$	p	a	b	c	m_d	$m_{d_{доп}}$	g'_{max}	$S'_{0,2}$	$S'_{0,85}$
2	0	0,3	12	—	$1/H^2$	2,7 ²⁴	0,029	4,870	$\pm 0,011$	$\pm 0,01$	0,3	10,5	—
4	0,02	0,6	75	60	$1/H^2$	24,58	-0,051	20,01	0,025	0,02	0,7	74	71
8	0,03	1,0	180	350	$1/H^2$	84,35	-0,098	31,58	0,026	0,03	1,2	176	370
16	0,09	1,5	260	750	$1/DH$	121,74	-0,123	42,43	0,042	0,04	1,7	264	760
24	0,20	1,63	350	900	$1/DH$	141,90	0,029	46,41	0,038	0,04	1,7	332	917

соответственных лучей расположились на прямой TT , называемой осью перспективы. Этот факт свидетельствует о том, что точки D_i и H_i находятся в перспективном соответствии, а следовательно, зависимость между D и H является проективной.

Если уточнение параметров a, b, c не приводит к выполнению условия $m_d \leq m_{d_{доп}}$, необходимо вводить поправки за дисторсию. Функция $d(\lg H)$ имеет гармонический характер и хорошо аппроксимируется первыми членами ряда Фурье. Сначала определяются четыре параметра:

$$d_{cp} = 0,5(d_{max} + d_{min}),$$

$$e = 0,5(d_{max} - d_{min}),$$

$$\omega = \pi / (\lg H_{d_{max}} - \lg H_{d_{min}}),$$

$$\lg H^* = 0,5(\lg H_{d_{max}} + \lg H_{d_{min}}).$$

Здесь d_{cp} — средняя величина дисторсии; e и ω — ее амплитуда и круговая частота; $H_{d_{max}}$ и $H_{d_{min}}$ — экспозиции, которым соответствуют наибольшее и наименьшее значения дисторсии; H^* — экспозиция, принимаемая за начальную фазу дисторсии. Рис. 3 иллюстрирует геометрический смысл этих параметров. Введение дисторсии по формуле (2) делает аппроксимацию практически вполне точной.

Можно уменьшить число параметров дисторсии до трех. Для этого нужно перевычислить a, b, c по формулам (5), (6), (7), взяв точки p, q, r так, чтобы обеспечивалось

$$\lg H_p = \lg H^* - L, \quad \lg H_q = \lg H^*,$$

$$\lg H_r = \lg H^* + L, \quad L = \lg H_{d_{max}} - \lg H_{d_{min}}$$

На рис. 3 показан результат исключения d_{cp} при новых значениях параметров a_0, b_0, c_0 . В окончательном виде будем иметь

$$D' = \frac{a_0 H + b_0}{c_0 H + 1} + e \sin \omega \lg \frac{H}{H^*}.$$

При наличии дисторсии уравнение (1) трансцендентно в отношении H . Поэтому для обратного перехода $D \rightarrow H$ целесообразно пользоваться формулами (2), (4), которые позволяют представить H явной функцией D .

График обратной фотометрической дисторсии $h(D)$ напоминает кривую, называемую лемнискатной Бернулли (рис. 3). Формула (4) представляет собой аппроксимацию функции $h(D)$ уравнением лемнискаты. Параметры аппроксимации определяются по данным таблицы:

$$D^* = 0,5(D_{h_{max}} + D_{h_{min}}), \quad g = (D^* - D_{min}) / \sqrt{2}, \quad f = 2h_{max} / g.$$

Здесь $D_{h_{max}}$ и $D_{h_{min}}$ — плотности полей сенситограммы, соответствующие максимальному и минимальному значению обратной дисторсии; D_{min} — плотность поля, соответствующая началу ХК.

Высокая точность проективной аппроксимации характеристической кривой фотографических материалов не может быть случайностью. По-видимому, она отображает существующий в природе закон проективного соответствия $H \approx D$. Аналогичные исследования выполнены нами в отношении характеристических кривых ряда телевизионных датчиков. И у телевизионных сенсоров обнаружилось проективное соответствие между энергией, поступающей на их вход, и выходным сигналом. Следовательно, можно утверждать, что изображениям в том смысле, как это трактуется в [2], присуща и геометрическая и энергетическая проективность.

Проективная аппроксимация ХК открывает возможности для хранения в компактной форме данных о функции $D(H)$ фотоматериалов, решения обратной фотометрической задачи, аналитического определения сенситометрических параметров фотоматериалов и механизации обработки данных сенситометрических испытаний. В качестве иллюстрации возможностей аналитической обработки в таблице представлены значения коэффициентов контрастности и светочувствительности, снятых с графиков кинетики проявления, представленных в [3] и вычисленных по формулам:

$$g'_{\max} = 0,575 \left(\frac{a}{c} - b \right), \quad S'_{0,2} = \frac{a - c(D_0 + 0,2)}{D_0 + 0,2 - b},$$

$$S'_{0,85} = 10 \frac{a - c(D_0 + 0,85)}{D_0 + 0,85 - b},$$

где g'_{\max} — максимальный градиент ХК, $S'_{0,2}$ и $S'_{0,85}$ — светочувствительность по критериям $D_{0,2} = D_0 + 0,2$ и $D_{0,85} = D_0 + 0,85$. Эти формулы получены на основании (1) при $d=0$. Введение дисторсии позволяет решать эти задачи с высокой точностью для любых фотоматериалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чибисов К. В., Теория фотографических процессов, М., Кинофотоиздат, 1935.
2. Родионов В. Н., Иконика и иконология, В кн. Космическая иконика, М., «Наука», 5.
3. Гороховский Ю. Н., Баранова В. П., Свойства черно-белых фотографических пленок, М., «Наука», 1970, 388, с. ил.
4. ГОСТ-2817-50, ГОСТ-9160-59.

Московский институт
инженеров землеустройства

Поступила в редакцию
1.III.1978

УДК 535.215:541.14

М. Т. КОСТЫШИН, В. М. ШАРЫЙ, Е. В. МИХАЙЛОВСКАЯ ФОТО-Э. Д. С. В PbI_2 И ЕЕ СВЯЗЬ С ФОТОЛИЗОМ СИСТЕМЫ $PbI_2 - Ag$

Изучение фотовольтаического эффекта в кристаллах и галогенсеребряных фотоэмульсиях конденсаторным методом позволяет исследовать электронные и ионные процессы, происходящие в них во время облучения [1, 2]. Первые исследования фотовольтаического эффекта, проведенные на кристаллах PbI_2 , показали [3], что при освещении сильно поглощаемым